Модели эндогенного формирования города

20 июля 2012 г.

План

Базовая(ые) модель(и) городской экономики

Базовые модели моноцентрического города

1. Закрытый город и отсутствующие собственники земли
2. Закрытый город и общественная собственность на землю
3. Открытый город и отсутствующие собственники земли
4. Открытый город и общественная собственность на землю
5. Модель Алонсо (использования земли) и модель с рынком жилья

Основные элементы модели моноцентрического города

1. CBD
2. Транспортные издержки
3. Bid rent function
4. Lot size function

Основные вопросы моделей

Основные вопросы

1. Плотность населения в городе
2. Спрос на землю
3. Величина ренты

Возможные факторы

1. Структура семьи
2. Выбор времени между трудом и досугом
3. Достоприпмечательности в городе
4. Структура дохода
5. Несколько типов транспорта

Хочется понять

Причину возникновения городов и их структуру

Теорема Старретта подсказывает что надо

1. Экстерналии или,
2. Несовершенную конкуренцию

Центр города как результат коммуникационных экстерналий

Модель с экстерналиями от общения

1. Континуум N одинаковых потребителей
2. Пространство $(-\infty, +\infty)$ в котором плотность земли 1 в каждой точке. Альтернативная цена земли R_A. Собственник земли — внешний лэндлорд.
3. Функция полезности имеет вида
$$u(z_x, s_x) + I_x.$$
4. *Бюджетное ограничения потребителя живущего в точке x*
$$z_x + R(x)\, s_x = Y_x - T(x)$$
5. Предположим что полезность от общения постоянна $I_x = I = const$
6. $T(x) = \int_X t\,|x - y|\, n(y)\, dy$
7. Потребитель выбирает где ему жить и сколько потреблять
8. Без потери общности считаем, что границы города $[-b, b]$

Силы

Агломерационная сила — экстерналии от взаимодействия

Дисперсионная сила — цена земли

Задача потребителя

Пусть

$$u(z, s) = z + \alpha \ln(s).$$

Bid Rent Function - решение оптимизационной задачи:

$$\Psi(x, U^*) = \max_s \frac{Y - U^* + I + \alpha \ln(s) - T(x)}{s}$$

FOC

$$Y - U^* + I - \alpha + \alpha \ln(s) - T(x) = 0$$

Задача потребителя

Обозначим

$$\xi = Y - U^* + I - \alpha$$

тогда

$$s^*(x) = \exp\left(\frac{-\xi + T(x)}{\alpha}\right)$$

Плотность населения

$$n^*(x) = \frac{1}{s^*(x)}$$

Подставив в формулу для функции ренты имеем

$$\Psi(x, U^*) = \alpha n^*(x)$$

Уравнение для определения величины затрат на коммуникации

По определению затраты потребителя на общение определяются как

$$T(x) = \int_X t\,|x-y|\,n(y)dy = \int_{-b}^{b} t\,|x-y|\,n(y)dy =$$

$$= \int_{-b}^{x} t\,(x-y)\,n(y)\,dy + \int_{x}^{b} t\,(y-x)\,n(y)\,dy$$

с другой стороны

$$n^*(x) = \frac{1}{s^*(x)} = \exp\left(\frac{\xi - T(x)}{\alpha}\right)$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \int_{-b}^{x} tn(y)\,dy - \int_{x}^{b} tn(y)\,dy$$

а также

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2tn(x)$$

Уравнение для определения величины затрат на коммуникации

В итоге имеем, что

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2t \exp\left(\frac{\xi - T(x)}{\alpha}\right)$$

Решение данного дифференциального уравнения имеет вид (при условии что функция достигает минимума в 0)

$$T(x) = -\alpha \ln\left(\frac{\alpha}{t} e^{-\frac{\xi}{\alpha}} \frac{k^2 e^{k|x|}}{\left(1 + e^{k|x|}\right)^2}\right)$$

Зная затраты на коммуникации, мы можем определить плотность населения

$$n^*(x) = \frac{1}{s^*(x)} = \exp\left(\frac{\xi - T(x)}{\alpha}\right) = \frac{\alpha}{t} \frac{k^2 e^{k|x|}}{\left(1 + e^{k|x|}\right)^2}$$

Определение равновесия

1. Рента на границе города

$$\Psi(b, U^*) = \alpha n^*(b) = \frac{\alpha^2}{t} \frac{k^2 e^{kb}}{(1+e^{kb})^2} = R_A$$

2. Число жителей равно численности населения

$$N = 2\int_0^b n^*(x)dx = 2\frac{\alpha}{t}\int_0^b \frac{k^2 e^{kx}}{(1+e^{kx})^2}dx =$$

$$= 2\frac{\alpha}{t}k\frac{e^{kb}-1}{1+e^{kb}}$$

Решая эту систему получаем, что

$$k^2 = \frac{t}{\alpha^2}\left(\frac{tN^2}{4} + 4R_A\right)$$

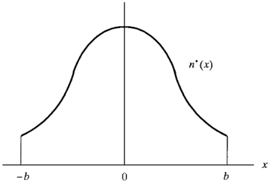
Зная k мы получили функцию плотности расселения,вогнута на

$$\left[-\frac{\ln(2+\sqrt{3})}{k}, \frac{\ln(2+\sqrt{3})}{k}\right]$$

Выводы

1. Коммуникационных экстерналий достаточно чтобы сформировать город (сконцентрировать население вокруг центра)
2. Равновесное распределение населения и ренты унимодально и симметрично. $(\Psi(x, U^*) = \alpha n^*(x))$
3. При росте населения пик плотности населения сдвигается вверх

$$n^*(0) = \frac{\alpha}{t}\frac{k^2}{4} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{tN^2}{16} + R_A\right)$$

Рис.: 

Оптимальное распределение потребителей в городе

Пусть потребители получают тот же уровень полезности, что и в равновесии U^*

$$z(x) + \alpha \ln(s(x)) + I = U^*$$

или

$$z(x) = U^* - \alpha \ln(s(x)) - I$$

Совокупные расходы потребителя имеют вид

$$\int_{-b}^{b} (T(x) + z(x) + R_A s(x))\, n(x) dx$$

Наша задача минимизировать эту функцию при ограничениях

$$s(x)n(x) = 1 \quad \forall x \in (-b, b)$$

$$\int_{-b}^{b} n(x)dx = N$$

$$T(x) = \int_{-b}^{x} t(x-y)n(y)dy + \int_{x}^{b} t(y-x)n(y)dy$$

Оптимальное распределение потребителей в городе

$$n^o(x) = \frac{\alpha}{2t}\frac{h^2 e^{h|x|}}{\left(1+e^{h|x|}\right)^2} \qquad n^*(x) = \frac{\alpha}{t}\frac{k^2 e^{k|x|}}{\left(1+e^{k|x|}\right)^2}$$

$$h^2 = \frac{t}{\alpha^2}\left(tN^2 + 8R_A\right) \qquad k^2 = \frac{t}{\alpha^2}\left(\frac{tN^2}{4} + 4R_A\right)$$

$$n^o(0) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{tN^2}{8} + R_A\right) \qquad n^*(0) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{tN^2}{16} + R_A\right)$$

Равновесные и оптимальные значения идентичны если бы потребитель имел издержки в 2 раза больше (интернализация экстерналий).
С точки зрения оптимальности города недостаточно плотно заселены.

Центр города как результат взаимодействия между фирмами

Задача производителя продукции

1. Рассмотрим M идентичных фирм
2. Город размещается на прямой. Плотность земли в каждой точке прямой равна 1. Альтернативная стоимость земли равна R_A.
3. Каждая фирма производит объем продукции Q, продоваемый на конкурентном рынке по единичной цене.
4. Для осуществления производства фирма несет коммуникационные издержки

   $$T(x) = \int_X t\,|x-y|\,m(y)\,dy$$

   и использует единицу офисного пространства
5. Прибыль производственной фирмы таким образом равна

   $$\pi(x) = Q - T(x) - R_o(x)$$

Задача фирмы девелопера

1. Офисы строит фирма девелопер, покупая землю у собственников земли.
2. Функция издержек на постройку офиса площадью s равна s^2
3. Прибыль девелопера имеет вид

$$R_o(x)\,s(x) - s^2(x) - R(x)$$

4. Предложение офисов равно

$$s^*(x) = \frac{R_o(x)}{2}$$

5. Условие баланса на “рынке офисов“

$$m(x) = s^*(x)$$

Условия равновесия

Свободный вход в секторе застройки влечет нулевую прибыль, т.е.

$$R_o(x)\,s(x) - s^2(x) = R(x)$$

или

$$R(x) = m^2(x)$$

В равновесии все производители получают одну и ту же прибыль π^*

$$\pi^* = Q - T(x) - 2m(x)$$

Дифференцируя это выражение получаем

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + tm(x) = 0$$

Решение данного уравнения

$$m^*(x) = k\cos\left(\sqrt{t}\,|x|\right)$$

Условия равновесия

Офисная рента

$$R_o^*(x) = 2m^*(x) = 2k\cos\left(\sqrt{t}\,|x|\right)$$

Земельная рента

$$R^*(x) = \left(m^*(x)\right)^2 = k^2\cos^2\left(\sqrt{t}\,|x|\right)$$

Рента на границе города должна быть равна цене альтернативного использования

$$R^*(b) = k^2\cos^2\left(\sqrt{t}b\right) = R_A$$

Кроме того, должно быть выполнено условие

$$M = \int_{-b}^{b} m^*(x)\,dx = \int_{-b}^{b} k\cos\left(\sqrt{t}\,|x|\right)dx = 2k\sqrt{t}\sin\left(\sqrt{t}b\right)$$

Из последних двух уравнений имеем

$$b^* = \frac{1}{\sqrt{t}}\arctan\left(\frac{M}{2}\sqrt{\frac{t}{R_A}}\right)$$

Условия равновесия

Зная протяженность города можем найти

$$k = \frac{2R_A}{\sqrt{4R_A + tM^2}}$$

Таким образом

$$m^*(x) = \frac{2R_A}{\sqrt{4R_A + tM^2}} \cos\left(\sqrt{t}\,|x|\right)$$

В целом выводы полученные для случая коммуникационных экстерналий переносятся и на этот случай.

Центр города как результат несовершенной конкуренции

Модель

1. Рассмотрим экономику с двумя типами товаров. Первый товар однородный и предлагается на совершенно конкурентном рынке. Второй товар дифференцируемый, производится при возрастающей отдаче от масштаба, монополистически конкурентными фирмами числом M.
2. Фирмы в монополистически уонкурентном секторе однородны. Постоянные предельные издержки равны c. Фиксированные издержки равны F. Для производства продукции требуется фиксированное количесство земли S_f.
3. Пространство действительная прямая. Земля в собственности внешних землевладельцев.
4. Торговля благами сопряжена с транспортными издержками τ.

Модель: задача потребителя

1. В экономике присутствует N потребителей,каждый из которых потребляет фиксированное количество земли S_h.
2. Предпочтения потребителей задаются следующей функцией полезности
$$\int_0^M u(q_i)\,di + z,$$
где
$$u(q) = \frac{q}{\alpha}(1+\ln\beta) - \frac{q}{\alpha}\ln\left(\frac{q}{\alpha}\right).$$
3. Бюджетное ограничение потребителя имеет вид
$$\int_0^M (p_i + \tau|x - y_i|)\, q_i di + R(x) S_h + z = Y,$$
где y_i — место производства разновидности i.

Задача потребителя

Так как фирмы используют одинаковые технологии, транспортные издержки одинаковы, то фирмы размещенные в одной и той же локации будут предлагать блага по одной и той же цене. Пусть $m(y)$ — число фирм в точке y. В силу квазилинейности предпочтений задача потребителя перепишется следующим эквивалентным образом

$$\int_X u(q(x,y))\, m(y)\, dy - \int_X (p(y) + \tau |x-y|)\, q(x,y)\, m(y)\, dy - R(x)\, S_h + Y$$

Из условий первого порядка имеем функцию спроса

$$q(x,y) = \alpha\beta e^{-\alpha(p(y)+t|x-y|)}$$

Задача производителя

Пусть число потребителей размещенных в точке x равно $n(x)$, то задача производителя имеет вид

$$(p(y)-c)\int_X q(x,y)\,n(x)\,dx - R(y)\,S_f - F.$$

Подставив найденный выше спрос из условий первого порядка имеем

$$p^* = p(y) = c + \frac{1}{\alpha}.$$

Для функции CES

$$p = \frac{\sigma}{\sigma-1}c.$$

Для данной функциональной формы α играет похожую роль: большое значени α похоже на большое значение σ.

Непрямая функция полезности и функция прибыли

Для простоты выражений предположим, что

$$S_h = S_f = 1.$$

Подставив найденное выражение для цены в спрос и в функцию полезности и прибыли получим

$$V(x) = \gamma \int_X e^{-\alpha\tau|x-y|} m(y)\, dy - R(x) + Y$$

$$\pi(y) = \gamma \int_X e^{-\alpha\tau|x-y|} n(x)\, dx - R(y) - F,$$

где $\gamma = \beta e^{-\alpha c - 1}$

Bid rent functions

Исходя из непрямой функции полезности несложно получить максимальную сумму денег которую агенты готовы заплатить за размещение в том или ином месте

$$\Psi(x, U^*) = \gamma \int_X e^{-\alpha\tau|x-y|} m(y)\, dy - U^* + Y$$

$$\Phi(y, \pi^*) = \gamma \int_X e^{-\alpha\tau|x-y|} n(x)\, dx - \pi^* - F$$

Равновесие

Равновесные величины $(R^*(x), n^*(x), m^*(y), U^*, \pi^*)$ находятся как решение следующей системы

$$R^*(x) = \max\{\Psi(x, U^*), \Phi(y, \pi^*), \ R_A\}$$

$$\Psi(x, U^*) = R^*(x) \quad \text{if } n(x) > 0$$

$$\Phi(y, \pi^*) = R^*(x) \quad \text{if } m(y) > 0$$

$$n^*(x) + m^*(x) = 1$$

$$\int_X n^*(x) = N$$

$$\int_X m^*(x) = M$$

Возможные типы равновесий

1. Жилая зона
2. Промышленная зона
3. Совместное пользование землей

Свойства Bid rent functions

Лемма. Функция $\Psi(x, U^*)$ строго вогнута на любой промышленной зоне и строго выпукла на жилой зоне.
Рассмотрим жилую зону $[a_1, a_2]$.в городе $[-l, l]$

$$\Psi(x, U^*) = \gamma \int_{-l}^{a_1} e^{-\alpha\tau|x-y|} m(y)\, dy + \gamma \int_{a_2}^{l} e^{-\alpha\tau|x-y|} m(y)\, dy - U^* + Y +$$

$$+\gamma \int_{a_1}^{a_2} e^{-\alpha\tau|x-y|} m(y)\, dy =$$

$$= \gamma \left(\int_{-l}^{a_1} e^{-\alpha\tau|x-y|} m(y)\, dy + \int_{a_2}^{l} e^{-\alpha\tau|x-y|} m(y)\, dy \right) - U^* + Y$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \gamma \left(-\alpha\tau \int_{-l}^{a_1} e^{-\alpha\tau|x-y|} m(y)\, dy + \alpha\tau \int_{a_2}^{l} e^{-\alpha\tau|x-y|} m(y)\, dy \right)$$

и

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \gamma(\alpha\tau)^2 \left(\int_{-l}^{a_1} e^{-\alpha\tau|x-y|} m(y)\, dy + \int_{a_2}^{l} e^{-\alpha\tau|x-y|} dy \right) > 0$$

Свойства Bid rent functions

Функция $\Psi(x, U^*)$

- строго вогнута на любой промышленной зоне
- строго выпукла на жилой зоне.

Функция $\Phi(y, \pi^*)$

- строго выпукла на промышленной зоне
- строго вогнута на жилой зоне

Эти свойства запрещают ситуации в которых например зона одного из агентов окружена зонами в которых хотя бы частично размещен другой.
Действительно, пусть $[b_1, b_2]$ это промышленная зона, окруженная жилой. В этом случае $\Psi(b_2, U^*) = \Phi(b_2, \pi^*)$, $\Psi(b_1, U^*) = \Phi(b_1, \pi^*)$ и $\Psi(x, U^*) < \Phi(x \pi^*)$, что противоречит тому факту, что в равновесии $\Psi(x, U^*) \geq \Phi(x, \pi^*) \quad \forall x \in (b_1, b_2)$.

Возможные конфигурации

Будем рассматривать только симметричные конфигурации. Их возможно всего две.

- зона совместного пользования землей, окруженная жилыми зонами
- зона совместного пользования землей, окруженная промышленными зонами.

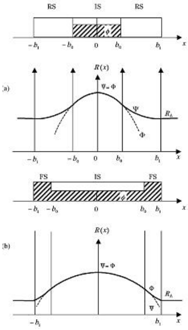


Рис.:

Рассмотрим случай когда зона совместного пользования $[-b_0, b_0]$, окружена жилыми зонами. Так как на этом отрезке $\Psi(x, U^*) = \Phi(y, \pi^*)$ и

$$\Psi(x, U^*) = \gamma \int_X e^{-\alpha\tau|x-y|} m(y) dy - U^* + Y$$

$$\Phi(y, \pi^*) = \gamma \int_X e^{-\alpha\tau|x-y|} n(x)\, dx - \pi^* - F$$

то

$$\int_X e^{-\alpha\tau|x-y|} (m(y) - n(y))\, dy = k = \frac{U^* - Y - F - \pi^*}{\gamma}.$$

Воспользовавшись конфигурацией, пару раз продифференцировав и преобразовав получим

$$m(y) - n(y) = \frac{\alpha\tau k}{2}$$

Плотность в зоне совместного пользования землей

Выше мы получили, что в зоне совместного пользования землей

$$m(y) - n(y) = \frac{\alpha\tau k}{2},$$

но с другой стороны баланс на рынке земли означает, что

$$m(y) + n(y) = 1.$$

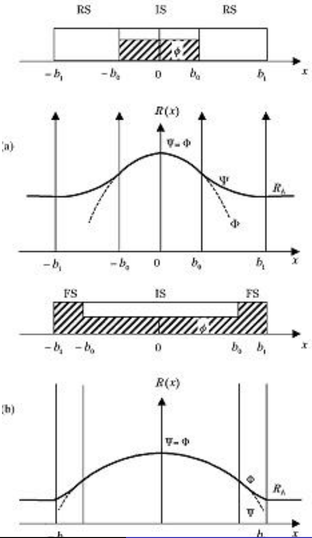
Это означает постоянные плотности фирм и населения в этом регионе.
Для того чтобы найти последнюю неизвестную подставим найденные плотности в вышеприведенное уравнение и воспользовавшись балансами численности получим следующее уравнение

$$\frac{M}{1 + \frac{\alpha\tau k}{2}} = M + N + \frac{2}{\alpha\tau}\ln(2 + \alpha\tau k)$$

Выводы

Когда $M < N$ тогда все фирмы сконцентрированны в центре с плотностью меньшей $\frac{1}{2}$, а остальная территория города жилая.
Когда $M > N$ тогда все потребители сконцентрированны в центре с плотностью меньшей $\frac{1}{2}$, а остальная территория города занята фирмами.
Когда $M = N$ то потребители и фирмы сосуществуют в каждой точке города и плотность равна $\frac{1}{2}$

Иллюстрация



Литература

- Fujita M., *Urban Economic Theory*, Cambridge University Press, 1989
- Fujita M. and J.-F. Thisse, *Economics of Agglomeration*, Cambridge University Press, 2002
- *Handbook of Regional and Urban Economics*, Vol. 2, ed. E.S. Mills, Elsevier, 2004
- Papageorgiou Y.Y. and D. Pines, *An Essay on Urban Economic Theory,* Kluwer Academic, *1999*