

Monocentric City Model

Imperfect Markets, New Economic Geography and Spatial
Economics
Nizhnij Novgorod, 2012

- 1 Модели моноцентрического города
 - Предтечи: Модель фон Тюнена (1826)
 - Базовая модель
- 2 Стратификация жителей городов
 - Почему в центре Детройта живут бедные, а в центре Парижа – богатые?
 - Время-Деньги!
 - Дела семейные
- 3 Почему возникает CBD?

- В чистом поле стоит единственный Город, его размеры – пренебрежимо малы, но рынок (МР) есть только там
- Окружающее пространство – земля – используется для производства разнообразной сельхозпродукции $1, \dots, n$
- Разные виды сельскохозяйственной деятельности характеризуются
 - различной производительностью земли a_1, \dots, a_n (a_i – кол-во земли для производства единицы i -ой продукции)
 - различными удельными транспортными издержками t_1, \dots, t_n (t_i стоимость транспортировки единицы i -ой продукции на единицу расстояния)
 - p_i – цена единицы i -ой продукции в МР
- Без ограничения общности $t_1/a_1 \geq t_2/a_2 \geq \dots \geq t_n/a_n$

Цена арендатора и арендная плата

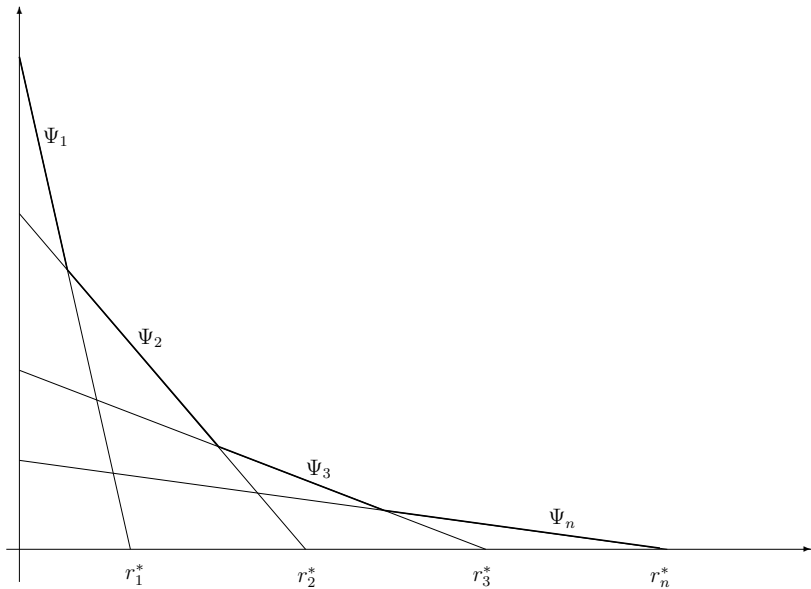
- $\Psi_i(r) = (p_i - t_i r)/a_i$ – цена арендатора (*bid rent*, максимальная цена, которую способен заплатить арендатор, производящий товар i в локации r)
- Равновесная арендная плата

$$R(r) = \max \left\{ \max_{i=1, \dots, n} \{ \Psi_i(r) \}, 0 \right\}$$

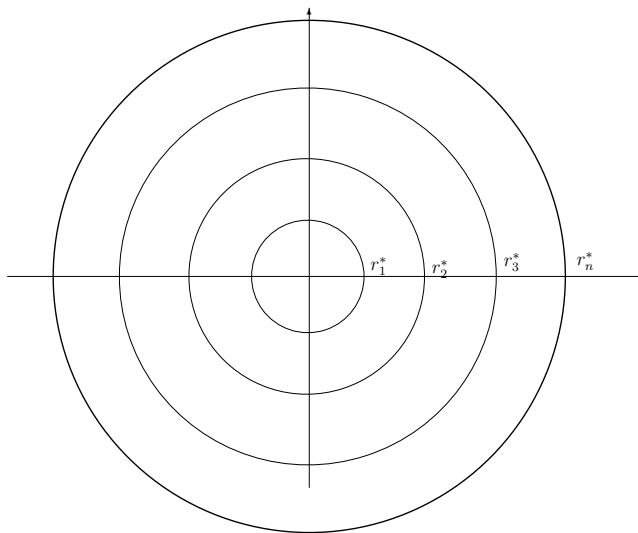
– верхняя огибающая линейных функций \Rightarrow
кусочно-линейная

- $r_i^* = \frac{p_i/a_i - p_{i+1}/a_{i+1}}{t_i/a_i - t_{i+1}/a_{i+1}} \iff \Psi_i(r_i^*) = \Psi_{i+1}(r_i^*), i \leq n-1,$
 $r_n^* = p_n/t_n, \Psi_n(r_n^*) = 0$

Структура ренты



Структура землепользования



- Наличие центра торговли MP эндогенно формирует равновесную пространственную структуру экономики с торговыми потоками
- Не опровергает ли это теорему Старрета о невозможности?
- Отнюдь: здесь пространство – неоднородно (MP – точка сингулярности ;-)

- Наличие центра торговли MP эндогенно формирует равновесную пространственную структуру экономики с торговыми потоками
- Не опровергает ли это теорему Старрета о невозможности?
- Отнюдь: здесь пространство – неоднородно (MP – точка сингулярности ;-)

- Сельхозугодья → городские кварталы
- Сельскохозяйственные культуры → жители города
- Рыночная площадь → Центральный Деловой Район (Central Business District, CBD)
- Транспортные издержки → транспортные издержки проезда на работу (commuting costs)
- Арендная плата за землю → арендная плата за жилье
- **Изучаемый вопрос:** Как будут расселяться жители вокруг единственного CBD?

- Сельхозугодья → городские кварталы
- Сельскохозяйственные культуры → жители города
- Рыночная площадь → Центральный Деловой Район (Central Business District, CBD)
- Транспортные издержки → транспортные издержки проезда на работу (commuting costs)
- Арендная плата за землю → арендная плата за жилье
- **Изучаемый вопрос:** Как будут расселяться жители вокруг единственного CBD?

- Сельхозугодья → городские кварталы
- Сельскохозяйственные культуры → жители города
- Рыночная площадь → Центральный Деловой Район (Central Business District, CBD)
- Транспортные издержки → транспортные издержки проезда на работу (commuting costs)
- Арендная плата за землю → арендная плата за жилье
- **Изучаемый вопрос:** Как будут расселяться жители вокруг единственного CBD?

- Сельхозугодья → городские кварталы
- Сельскохозяйственные культуры → жители города
- Рыночная площадь → Центральный Деловой Район (Central Business District, CBD)
- Транспортные издержки → транспортные издержки проезда на работу (commuting costs)
- Арендная плата за землю → арендная плата за жилье
- Изучаемый вопрос: Как будут расселяться жители вокруг единственного CBD?

- Сельхозугодья → городские кварталы
- Сельскохозяйственные культуры → жители города
- Рыночная площадь → Центральный Деловой Район (Central Business District, CBD)
- Транспортные издержки → транспортные издержки проезда на работу (commuting costs)
- Арендная плата за землю → арендная плата за жилье
- Изучаемый вопрос: Как будут расселяться жители вокруг единственного CBD?

- Сельхозугодья → городские кварталы
- Сельскохозяйственные культуры → жители города
- Рыночная площадь → Центральный Деловой Район (Central Business District, CBD)
- Транспортные издержки → транспортные издержки проезда на работу (commuting costs)
- Арендная плата за землю → арендная плата за жилье
- **Изучаемый вопрос:** Как будут расселяться жители вокруг единственного CBD?

- Континуум $[0, N]$ *идентичных* работников/потребителей, работают в CBD, получают доход Y .
- Потребляют: композитное потребительское благо z по цене 1 и арендуют жилье площадью s
- На расстоянии r от CBD транспортные расходы $T(r)$, арендная плата $R(r)$, где $0 \leq T(0) < Y < T(\infty)$
- Задача потребителя

$$\max_{r,s,z} U(z,s) \text{ s.t. } z + s \cdot R(r) = Y - T(r)$$

- В равновесии ни у кого нет стимула сменить место жительства (отсутствие зависти)
- ...т.е. все жители достигают одного и того же уровня полезности u^* вне зависимости от места проживания
- уровень u^* определяется эндогенно

- В равновесии ни у кого нет стимула сменить место жительства (отсутствие зависти)
- ...т.е. все жители достигают одного и того же уровня полезности u^* вне зависимости от места проживания
- уровень u^* определяется эндогенно

- В равновесии ни у кого нет стимула сменить место жительства (отсутствие зависти)
- ...т.е. все жители достигают одного и того же уровня полезности u^* вне зависимости от места проживания
- уровень u^* определяется эндогенно

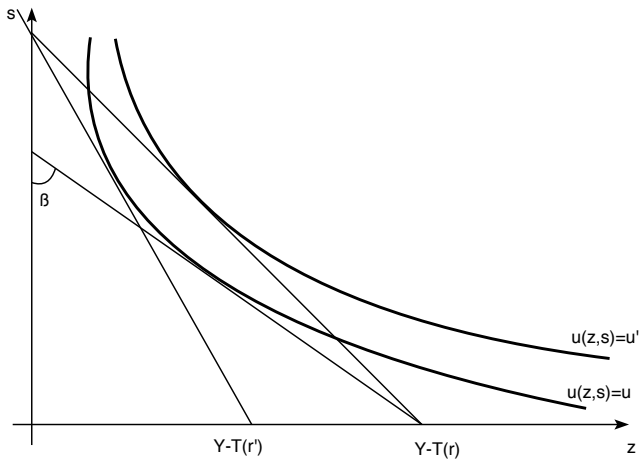
- $Z(s, u)$ – единственное решение уравнения $U(z, s) = u$
- Цена арендатора (bid rent), желающего извлечь уровень полезности u

$$\Psi(r, u) = \max_s \frac{Y - T(r) - Z(s, u)}{s}$$

- Спрос на жилье арендатора (lot size), желающего извлечь уровень полезности u

$$S(r, u) = \arg \max_s \frac{Y - T(r) - Z(s, u)}{s}$$

Немного графики



$$\operatorname{tg} \beta = \Psi(r, u),$$

$$u' > u \Rightarrow \Psi(r, u') < \Psi(r, u), \quad S(r, u') > S(r, u),$$

$$r' > r \Rightarrow \Psi(r', u) < \Psi(r, u), \quad S(r', u) > S(r, u)$$

Предложение

Функция цены арендатора $\Psi(r, u)$ является убывающей по r и u (пока не обратится в ноль), а функция спроса на жилье $S(r, u)$ является возрастающей по r и u .

$$\frac{d\Psi}{dr} = -\frac{T'(r)}{S(r, u)} < 0 \quad \frac{d\Psi}{du} = -\frac{1}{S(r, u)} \frac{\partial Z}{\partial u} < 0$$

$$\frac{dS}{dr} = -\frac{T'(r)}{S(r, u)} \cdot \frac{\partial \tilde{s}}{\partial R} > 0 \quad \frac{dS}{du} = \frac{d\Psi}{du} \cdot \frac{\partial \tilde{s}}{\partial R} > 0$$

где $\tilde{s}(R, I)$ – хиксовский спрос на жилье при цене (ренте) R и доходе I .

- Альтернативное использование земли – сельское хозяйство, арендная плата $R_A \geq 0$
- Пусть r^* – равновесный радиус города (при $r > r^*$ начинается село), u^* – равновесный уровень полезности
- **Условие 1.** Город заканчивается там, где становится выгоднее заниматься сельским хозяйством $\Psi(r^*, u^*) = R_A$
- **Условие 2.** Всем хватило места:

$$\int_0^{r^*} \frac{2\pi r}{S(r, u^*)} dr = N$$

- Равновесие определяется величинами u^* и r^* , удовлетворяющим соотношениям \uparrow существует и единственно (Fujita, 1989)

- Равновесная рента

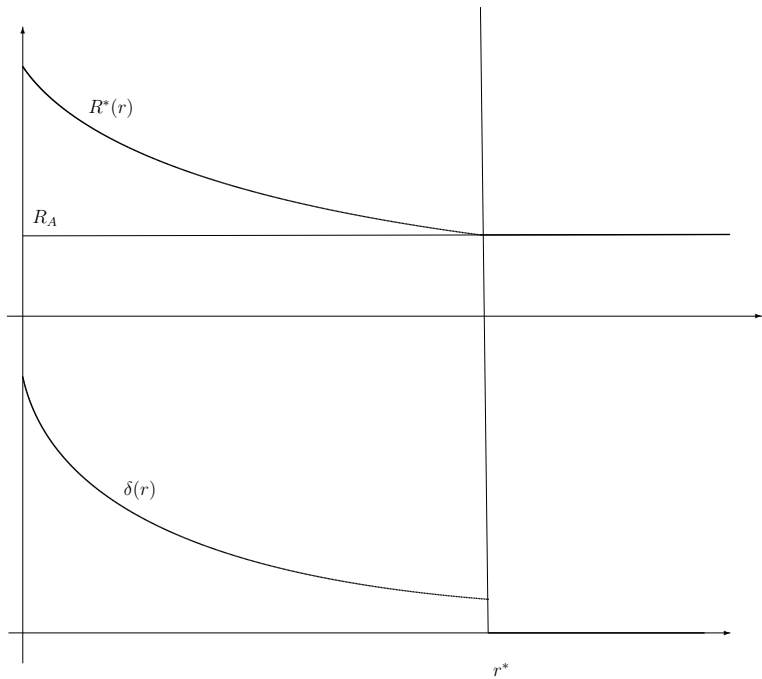
$$R^*(r) = \begin{cases} \Psi(r, u^*), & r \leq r^* \\ R_A & r \geq r^* \end{cases}$$

убывает по мере удаления от CBD

- Равновесная плотность населения

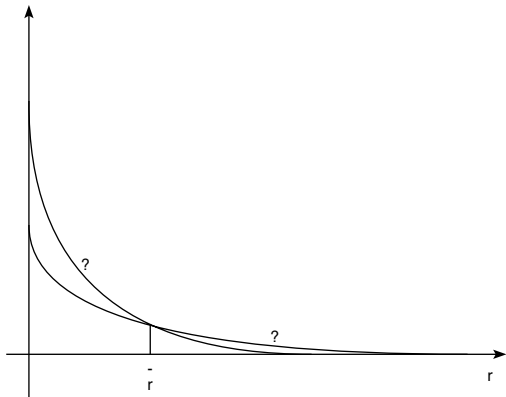
$$\delta(r) = \frac{1}{S(r, u^*)}$$

убывает по мере удаления от CBD



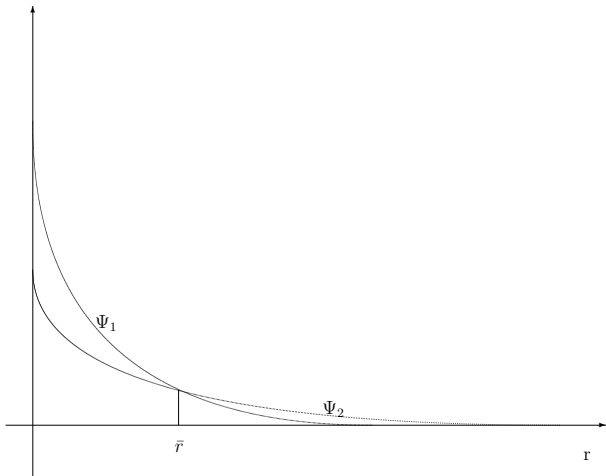
Неоднородность населения

- Пусть имеются две группы населения с разными функциями цены арендатора (bid-rents) ,
 $\Psi_1(r, u_1^*) \neq \Psi_2(r, u_2^*)$
- Если $\Psi_1(r, u_1^*) > \Psi_2(r, u_2^*)$ (или наоборот), то одна группа вытесняет другую
- Если же в точке \bar{r} : $\Psi_1(\bar{r}, u_1^*) = \Psi_2(\bar{r}, u_2^*)$ – произойдет стратификация:



- Зависит от наклона кривых в точке пересечения \bar{r} :

$$-\frac{d\Psi_1}{dr}(\bar{r}) > -\frac{d\Psi_2}{dr}(\bar{r}) \Rightarrow \begin{cases} \Psi_1(r, u_1^*) > \Psi_2(r, u_2^*) & \text{при } r < \bar{r} \\ \Psi_1(r, u_1^*) < \Psi_2(r, u_2^*) & \text{при } r > \bar{r} \end{cases}$$



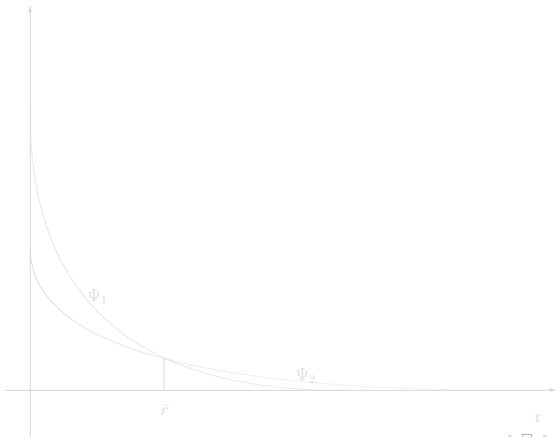
Почему в центре Детройта
живут бедные, а в центре
Парижа – богатые?

"Детройт"

- „Богатые” и „бедные”: $Y_1 < Y_2 \Rightarrow u_1^* < u_2^*$
- Жилье – нормальное благо: $S_1(\bar{r}, u_1^*) < S_2(\bar{r}, u_2^*) \Rightarrow$

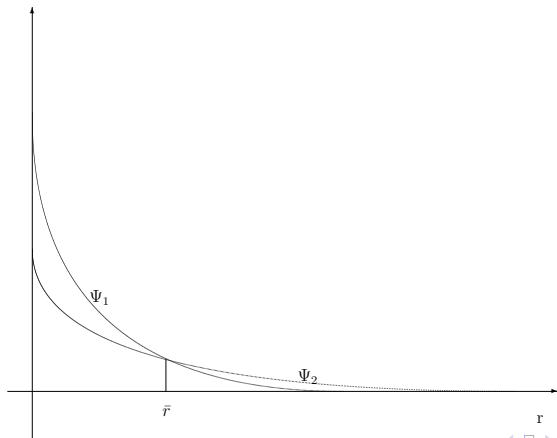
$$-\frac{d\Psi_1}{dr}(\bar{r}) = \frac{T'(\bar{r})}{S_1(\bar{r}, u_1^*)} > \frac{T'(\bar{r})}{S_2(\bar{r}, u_2^*)} = -\frac{d\Psi_2}{dr}(\bar{r})$$

- т.е., бедные поселятся в центре, а богатые – в пригороде!



"Детройт"

- „Богатые” и „бедные”: $Y_1 < Y_2 \Rightarrow u_1^* < u_2^*$
- Жилье – нормальное благо: $S_1(\bar{r}, u_1^*) < S_2(\bar{r}, u_2^*) \Rightarrow$
$$-\frac{d\Psi_1}{dr}(\bar{r}) = \frac{T'(\bar{r})}{S_1(\bar{r}, u_1^*)} > \frac{T'(\bar{r})}{S_2(\bar{r}, u_2^*)} = -\frac{d\Psi_2}{dr}(\bar{r})$$
- т.е., бедные поселятся в центре, а богатые – в пригороде!



- Что может привлечь в центр?
- Достопримечательности! (amenities) – локальные общественные блага, с убывающим по мере удаления от центра эффектом, $\frac{da}{dr}(r) < 0$, потребительская полезность $U(z, s, a)$
- Задача потребителя

$$\max_{r,s,z} U(z, s, a(r)) \text{ s.t. } z + s \cdot R(r) = Y - T(r)$$

- Что может привлечь в центр?
- Достопримечательности! (amenities) – локальные общественные блага, с убывающим по мере удаления от центра эффектом, $\frac{da}{dr}(r) < 0$, потребительская полезность $U(z, s, a)$
- Задача потребителя

$$\max_{r, s, z} U(z, s, a(r)) \text{ s.t. } z + s \cdot R(r) = Y - T(r)$$

Для двух классов с доходами $Y_1 < Y_2$

$$\frac{d\Psi_1}{dr} = \frac{1}{S_1(r)} \left[-T'(r) + \left. \frac{\partial V}{\partial a} \right|_1 \cdot \frac{da}{dr}(r) \right] < 0$$

$$\frac{d\Psi_2}{dr} = \frac{1}{S_2(r)} \left[-T'(r) + \left. \frac{\partial V}{\partial a} \right|_2 \cdot \frac{da}{dr}(r) \right] < 0$$

где V – непрямая функция полезности (в равновесии

$V|_1(*) = u_1^*$, $V|_2(*) = u_2^*$)

Пусть $\Psi_1(\bar{r}, u_1^*) = \Psi_2(\bar{r}, u_2^*)$ в точке $\bar{r} \geq 0$. Кто где поселится, зависит от знака

$$\Delta = -\frac{d\Psi_1}{dr}(\bar{r}) + \frac{d\Psi_2}{dr}(\bar{r}) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} 0$$

$$\Delta = \left(\frac{T'(\bar{r})}{S_1(\bar{r})} - \frac{T'(\bar{r})}{S_2(\bar{r})} \right) - \frac{da}{dr}(\bar{r}) \left[\left. \frac{\partial V}{\partial a} \right|_1 \cdot \frac{1}{S_1(\bar{r})} - \left. \frac{\partial V}{\partial a} \right|_2 \cdot \frac{1}{S_2(\bar{r})} \right] \leq 0$$

$$\frac{T'(\bar{r})}{S_1(\bar{r})} - \frac{T'(\bar{r})}{S_2(\bar{r})} > 0 \text{ — как в Детройте}$$

если

$$\left. \frac{\partial V}{\partial a} \right|_1 \cdot \frac{1}{S_1(\bar{r})} - \left. \frac{\partial V}{\partial a} \right|_2 \cdot \frac{1}{S_2(\bar{r})} \geq 0 \text{ — ещё детройтее}$$

но если

$$\left. \frac{\partial V}{\partial a} \right|_1 \cdot \frac{1}{S_1(\bar{r})} - \left. \frac{\partial V}{\partial a} \right|_2 \cdot \frac{1}{S_2(\bar{r})} \ll 0 \text{ — богатые поселятся в центре!}$$

Время-Деньги!

Учет временных транспортных издержек

- Два типа транспортных издержек – *денежные* и *временные*: $a \geq 0$ и $b \geq 0$ (на единицу расстояния)
- Доходы: W – ставка заработной платы, Y_N – прочие (внезарплатные) доходы, \bar{t} – полная величина ресурса времени
- Задача потребителя:

$$\max_{r,s,z} U(z, s, t_\ell) \text{ s.t. } z + s \cdot R(r) + ar = Y_N + W \cdot t_w \text{ и } t_\ell + t_w + br = \bar{t}$$

- Или

$$\max_{r,s,z} U(z, s, t_\ell) \text{ s.t. } z + s \cdot R(r) + W \cdot t_\ell = I(r),$$

- где $I(r) = Y_N + I_w(r) - ar$, $I_w(r) = W \cdot (\bar{t} - br)$
- Полные транспортные издержки $T(r) = ar + Wbr$

- $Z(s, t_\ell, u)$ – единственное решение уравнения $U(z, s, t_\ell) = u$
- Цена арендатора (bid rent), желающего извлечь уровень полезности u

$$\Psi(r, u) = \max_{s, t_\ell} \frac{I(r) - Z(s, t_\ell, u) - Wt_\ell}{s}$$

- Спрос на жилье арендатора (lot size), желающего извлечь уровень полезности u

$$S(r, u) = \arg \max_s \frac{I(r) - Z(s, t_\ell, u) - Wt_\ell}{s} = \hat{s}(\Psi(r, u), W, I(r)),$$

где $\hat{s}(R, W, I)$ – маршаллианский спрос на землю (при земельной ренте R , цене досуга W и доходе I)

- Пусть две группы лиц различаются по внезарплатным доходам: $Y_{N1} < Y_{N2}$
- Как они будут расселяться в городе?

$$-\frac{\partial}{\partial Y_N} \left(\frac{d\Psi}{dr} \right) = \frac{\partial}{\partial Y_N} \left(\frac{T'(r)}{\hat{s}(\Psi(r, u), W, I(r))} \right) = -\frac{a + Wb}{\hat{s}^2} \frac{\partial \hat{s}}{\partial I} < 0$$

- То есть

$$Y_{N1} < Y_{N2} \Rightarrow -\frac{d\Psi_1}{dr} > -\frac{d\Psi_2}{dr}$$

Вывод

*Ближе к центру будут селиться жители с **меньшей** величиной внезарплатных доходов (при прочих равных условиях).*

Гетерогенность по зарплате W

- Пусть две группы лиц различаются по зарплате: $W_1 < W_2$
- Как они будут расселяться в городе?

$$-\frac{\partial}{\partial Y_N} \left(\frac{d\Psi}{dr} \right) = \left(\frac{1}{S} \frac{\partial T'}{\partial W} - \frac{T'}{S^2} \frac{\partial S}{\partial W} \right) = \frac{T'}{SW} \left(\frac{W}{T'} \frac{\partial T'}{\partial W} - \frac{W}{S} \frac{\partial S}{\partial W} \right) =$$

- где $\mathcal{E}_{T'/W}$ – эластичность предельных транспортных издержек по зарплате, $\mathcal{E}_{S/W}$ – эластичность спроса на землю по зарплате
- $\mathcal{E}_{T'/W} = \frac{bW}{a+bW}$, $\mathcal{E}_{S/W} = \eta \frac{I_w(r)}{I(r)} + \varepsilon$, где $\eta = \frac{\partial \hat{s}}{\partial I} \frac{I}{\hat{s}}$ – эластичность маршаллианского спроса на землю по доходу, $\varepsilon = \frac{\partial \hat{s}}{\partial W} \frac{W}{\hat{s}}$ – эластичность маршаллианского спроса на землю по цене времени досуга (которая равна ставке заработной платы)
- $I(r) = Y_N + I_w(r) - ar$, $I_w(r) = W \cdot (\bar{t} - br)$

Чтоб ты жил на одну зарплату!

Вывод

Пусть доход работников состоит из одной зарплаты ($Y_N = 0$) и отсутствуют денежные транспортные расходы ($a = 0$). Тогда:

(i) если $\eta + \varepsilon > 1$, то ближе к центру будут селиться жители с **меньшей** величиной заработной платы

(i) если $\eta + \varepsilon < 1$, то ближе к центру будут селиться жители с **большой** величиной заработной платы

(i) если $\eta + \varepsilon = 1$, то уровень заработной платы не **оказывает влияния** на место поселения

Чтоб ты жил на одну зарплату! (продолжение)

При $\eta + \varepsilon < 1$ положим $\widehat{W} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\eta + \varepsilon}{1 - (\eta + \varepsilon)}$

Вывод

Пусть доход работников состоит из одной зарплаты ($Y_N = 0$), а денежные транспортные расходы положительны ($a > 0$). Тогда:

(i) если $\eta + \varepsilon \geq 1$, то ближе к центру будут селиться жители с **меньшей** величиной заработной платы

(ii) если $0 < \eta + \varepsilon < 1$, то при $W < \widehat{W}$ рост заработной платы стимулирует удаление от центра, но если $W > \widehat{W}$, то рост заработной платы будет вызывать стремление селиться ближе к центру.

Дела семейные

- Состав семьи: d – количество иждивенцев, n – количество работников, $h = n + d$
- Задача семьи-потребителя

$$\max_{r,s,z,t_\ell} U(z,s,t_\ell; d,n) \text{ s.t. } z + s \cdot R(r) + n \cdot a \cdot r = Y_N + n \cdot W \cdot t_w$$
$$\text{и } t_\ell + t_w + br = \bar{t}$$

- или

$$\max_{r,s,z,t_\ell} U(z,s,t_\ell; d,n) \text{ s.t. } z + s \cdot R(r) + n \cdot W t_\ell = I(r,n),$$

$$\text{где } I(r,n) = Y_N + W \cdot (\bar{t} - br) - n \cdot a \cdot r$$

- $Z(s, t_\ell, u; d, n)$ – единственное решение уравнения $U(z, s, t_\ell; d, n) = u$
- Цена арендатора (bid rent), желающего извлечь уровень полезности u

$$\Psi(r, u) = \max_{s, t_\ell} \frac{I(r) - Z(s, t_\ell, u; d, n) - nWt_\ell}{s}$$

- Как будут расселяться семьи в зависимости от их состава?

Предложение

- (i) чем больше иждивенцев в семье (при равном числе работников), тем дальше от центра они будут селиться
- (ii) если доход работников состоит только из зарплаты ($Y_N = 0$), тогда расселение будет зависеть от относительной доли работников в семье n/h : чем ниже эта доля, тем дальше от центра будет селиться семья
- (iii) если доход работников состоит только из зарплаты ($Y_N = 0$) и в семье нет иждивенцев ($d = 0$), то размер семьи не влияет на выбор места поселения

Модель Мута

Модель со строй-индустрией

- Вместо жилплощади s – потребляемое (композиционное) благо: жилищные услуги q . $R_H(r)$ – стоимость единицы жилищных услуг на расстоянии r от центра
- Задача потребителя

$$\max_{r,q,z} U(z, q) \text{ s.t. } z + q \cdot R_H(r) = Y - T(r)$$

- Задача строительной фирмы (индустрии) с неоклассической производственной функцией $F(K, L)$

$$\max_{L,K} R_H(r) \cdot F(L, K) - R(r)L - K$$

где $R(r)$ – земельная рента, капитал абсолютно мобилен и его цена нормализована к единице.

- Пусть

$$s = \frac{q}{F(L, K)}L, \quad k = \frac{q}{F(L, K)}K \Rightarrow q = F(s, k)$$

- Условие нулевой прибыльности

$$R_H(r) \cdot F(L, K) - R(r)L - K = 0 \Rightarrow R_H(r) = \frac{R(r)s}{q} + \frac{k}{q}$$

- Эквивалентная задача потребителя

$$\max_{r, s, z, k} U(z, F(s, k)) \text{ s.t. } z + k + s \cdot R(r) = Y - T(r)$$

- Пусть $Z(q, u)$ – единственное решение $U(z, q) = u$, тогда

$$\Psi_H(r, u) = \max_q \frac{Y - T(r) - Z(q, u)}{q}$$

Предложение

Функция $\Psi_H(r, u)$ является убывающей по r и u :

$$\frac{d\Psi_H}{dr} = -\frac{T'(r)}{Q(r, u)} < 0 \quad \frac{d\Psi_H}{du} = -\frac{1}{Q(r, u)} \frac{\partial Z}{\partial u} < 0$$

- Земельная рента

$$\Psi_L(r; R_H(r)) = \max_{L, K} \frac{R_H(r)F(L, K) - K}{L} = \max_{s, k} \frac{R_H(r)F(s, k) - k}{s}$$

- В равновесии выполнено $R_H(r) = \Psi_H(r, u)$, положим

$$\Psi(r, u) = \Psi_L(r; \Psi_H(r, u)) = \max_{s, k} \frac{Y - T(r) - Z(F(s, k), u) - k}{s}$$

максимальная земельная рента, на которую согласится фирма при ожидаемой полезности домохозяйств u .

- $s(r, u)$ и $k(r, u)$ – решения этой задачи
- Равновесные значения u^* и r^* определяются из условий

$$\Psi(r^*, u^*) = R_A, \int_0^{r^*} \frac{2\pi r}{s(r, u^*)} dr = N$$

Предложение

Равновесие существует и единственно

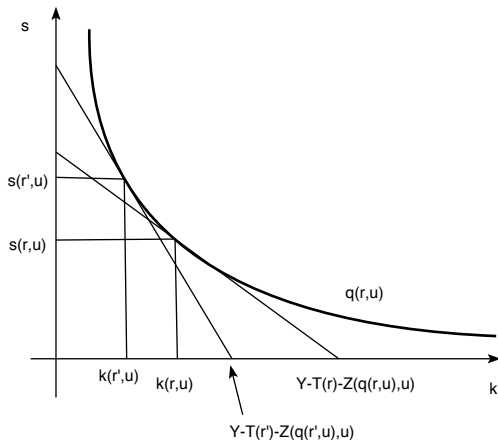
“Капиталооснащенность” Земли

Пусть $s(r) = s(r, u^*)$, $k(r) = k(r, u^*)$, рассмотрим $v(r) = \frac{k(r)}{s(r)}$ –
использование капитала на единицу площади земли
 $\left(s = \frac{q}{F(L,K)} L, k = \frac{q}{F(L,K)} K \right)$

Предложение

Капиталооснащенность земли $\frac{k(r)}{s(r)}$ является убывающей
функцией относительно r

Иллюстрация



Если капиталонасыщенность является отражением этажности, то из утверждения следует, что этажность в городе уменьшается от центра к окраине.

- Модели моноцентрического города (т.е., города с единственным местом занятости, расположенным в центре) достаточно хорошо описывают наблюдаемые явления
- Предположение о моноцентричности не является универсальным, крупные города, как правило, полицентричны
- Существование CBD постулируется, а не является естественным исходом формирования

Хватит, или еще?

„Здесь Город будет заложен!“

- Выбор конкретного места может быть обусловлен политическим/религиозными/географическими причинами
- Но каковы ЭКОНОМИЧЕСКИЕ причины образования агломераций?
- То есть, почему экономически выгодно собираться вместе людям и фирмам?

Положительные внешние влияния концентрации.

- Sharing (взаимное участие) – *технологические* выгоды для фирм от близости друг к другу
- Matching (востребованность) – выгоды для работников (и фирм) от более лучшей сочетаемости трудовых навыков и характера работы
- Learning (взаимное обучение) – информационные выгоды для фирм и работников благодаря „перетоку” знаний и умений от более производительных/умелых к желающим повысить свой уровень

Модель взаимодействия потребителей

- Континуум идентичных потребителей/работников $[0, M]$ с доходом Y расселяются в однородном пространстве $X = (-\infty, \infty)$
- Аграрная земельная рента $R_A > 0$
- Задача потребителя в локации $x \in X$

$$\max_{x,s,z} u(z,s) + I_x \text{ s.t. } z + s \cdot R(x) = Y - T(x)$$

где I_x – поле взаимодействия, $T(x)$ – издержки, связанные со взаимодействием, $R(x)$ – арендная плата в локации x

- $T(x)$ и $R(x)$ формируются эндогенно

Упрощающие предположения

- $I_x \equiv I$, $u(z, x) = z + \alpha \ln s$, расходы на взаимодействие – транспортные расходы, линейные по расстоянию, t – расходы на единицу
- $n(x)$ – эндогенная плотность расселения, без ограничения общности $\text{supp } n(x) \subset [-b, b]$ (ввиду ограниченности бюджета)
- Тогда $T(x) = \int_{-b}^b t \cdot |x - y| n(y) dy$
- В равновесии достигается единый уровень полезности U^* , поэтому цена арендатора

$$\Psi(x, U^*) = \max_s \frac{Y - U^* + I + \alpha \ln s - T(x)}{s}$$

- Условие первого порядка $\zeta + \alpha \ln s - T(x) = 0$, где $\zeta = Y - U^* + I - \alpha$ – эндогенная константа, как и U^* , отсюда

$$s^*(x) = e^{\frac{-\zeta + T(x)}{\alpha}},$$

плотность населения

$$n^*(x) = \frac{1}{s^*(x)} = e^{\frac{\zeta - T(x)}{\alpha}}$$

подставим $s^*(x)$ в выражение цены арендатора, получим

$$\Psi(x, U^*) = \frac{\alpha}{s^*(x)} = \alpha n^*(x)$$

- Дифференцируя дважды по x

$$T(x) = \int_{-b}^b t \cdot |x-y| dy = \int_{-b}^x t \cdot (x-y)n(y) dy + \int_x^b t \cdot (y-x)n(y) dy$$

получаем $\frac{d^2 T}{dx^2} = 2t \cdot n^*(x) = 2t \cdot e^{\frac{\zeta - T(x)}{\alpha}}$

- Решаем дифур

$$T(x) = -\alpha \ln \left[\frac{\alpha}{t} e^{-\frac{\zeta}{\alpha}} \frac{k^2 e^{k|x|}}{(1 + e^{k|x|})^2} \right], \quad k - \text{константа интегрирования}$$

- Отсюда

$$n^*(x) = \frac{\alpha}{t} \frac{k^2 e^{k|x|}}{(1 + e^{k|x|})^2}$$

- На эндогенной границе города b^* арендная плата равна сельскохозяйственной $\Psi(b^*, U^*) = R_A$, поэтому

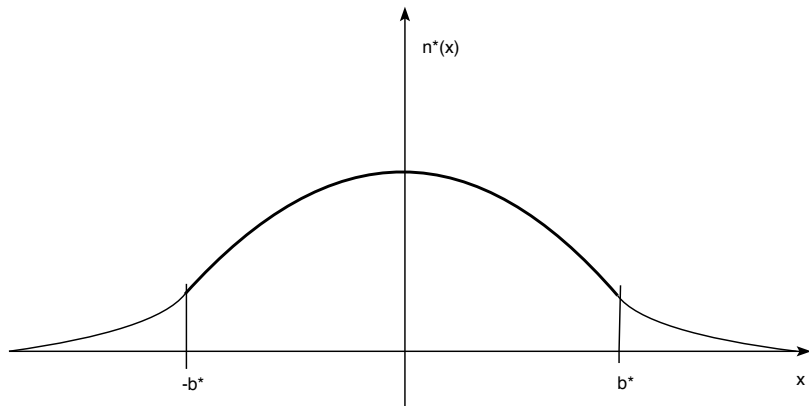
$$\frac{R_A}{\alpha} = n^*(b^*) = \frac{\alpha}{t} \frac{k^2 e^{kb^*}}{(1 + e^{kb^*})^2}$$

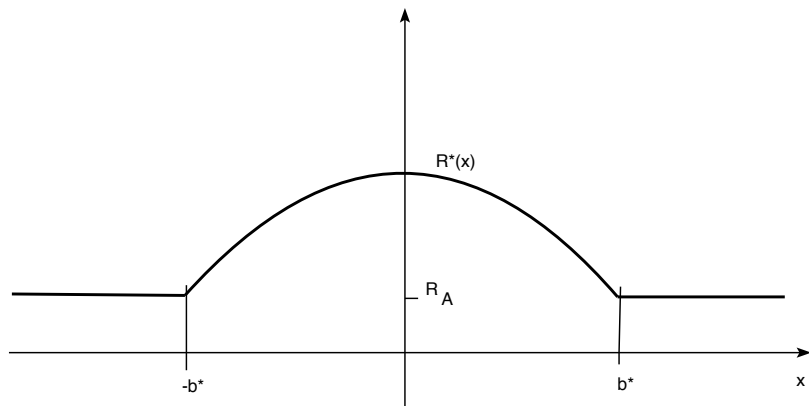
- Совокупное население

$$N = 2 \int_0^{b^*} n^*(x) dx = \frac{\alpha}{t} k \frac{e^{kb^*} - 1}{e^{kb^*} + 1}$$

- Решая систему, получим $k = \frac{1}{\alpha} \sqrt{t \cdot \left(\frac{tN^2}{4} + 4R_A \right)}$
- $b^* = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{2\alpha k + tN}{2\alpha k - tN} \right)$ – эндогенный размер города

График плотности





$$R^*(x) = \alpha n^*(x) \text{ для } x \in [-b^*, b^*]$$

Модель взаимодействия фирм

- Континуум $[0, M]$ идентичных фирм, выпуск каждой Q продается на конкурентном рынке по цене 1
- Взаимодействие – поездки друг к другу, издержки взаимодействия

$$T(x) = \int_{-b}^b t|x-y|m(y)dy$$

где t – удельные транспортные издержки, $m(y)$ – эндогенная плотность распределения фирм (например, если фирма занимает один этаж, то $m(y)$ – количество этажей в доме в точке y)

- Прибыль $\pi(x) = Q - T(x) - R(x)$, где $R(x)$ – стоимость аренды офиса, альтернативная рента (например, жилье) $R_A > 0$. В равновесии $\pi(x) \equiv \pi^*$

- Прибыль $\pi_c(x) = R(x) \cdot s(x) - [s(x)]^2 - R(x)$, где $s(x)$ – количество этажей (фирм-арендаторов)
- Из условия первого порядка $s^*(x) = R(x)/2$,
- Равновесие на рынке офисов $s^*(x) = m(x)$ т.е.
 $2m(x) = R(x) = Q - T(x) - \pi^*$
- Отсюда $\frac{d^2 T}{dx^2} = -2 \frac{d^2 m}{dx^2}$
- С другой стороны,

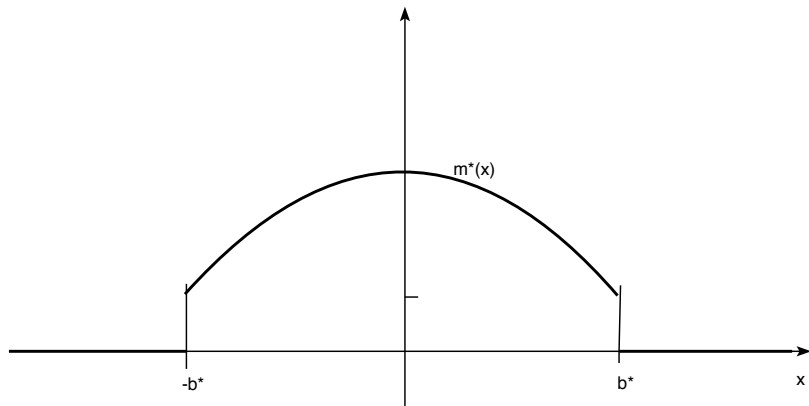
$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left(\int_{-b}^b t|x-y|m(y)dy \right) = 2t \cdot m(x)$$

- Решаем дифур $\frac{d^2 m}{dx^2} + t \cdot m(x) = 0$: $m^*(x) = k \cdot \cos(\sqrt{t} \cdot |x|)$,
 k – константа интегрирования
- Граничные условия $R_A = R^*(b) = 2k \cdot \cos(\sqrt{t} \cdot b)$
- Все фирмы нашли место для офиса

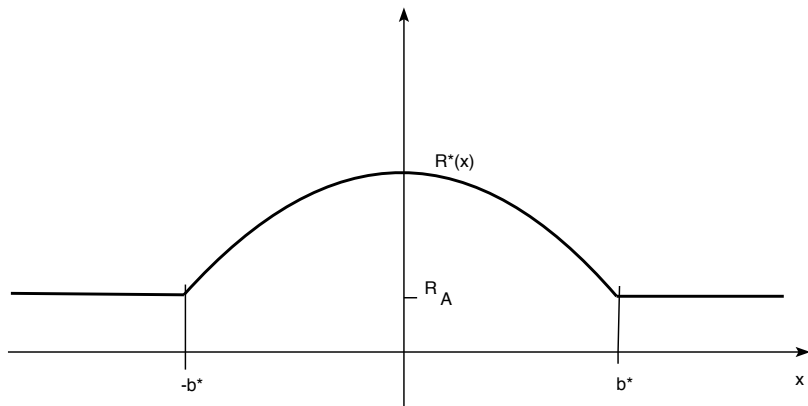
$$M = 2 \int_0^b m(x) dx = 2k\sqrt{t} \cdot \sin(\sqrt{t} \cdot b)$$

- Отсюда $b^* = \frac{1}{\sqrt{t}} \arctg\left(\frac{M}{R_A}\right)$, $k = \frac{R_A}{2 \cos\left(\arctg\left(\frac{M}{R_A}\right)\right)}$

График плотности фирм



Стоимость аренды офиса



- Как фирмы, так и работники стремятся к концентрации в CBD
- поскольку это отвечает их интересам благодаря положительным внешним влияниям
- пока они превышают отрицательные внешние влияния (издержки скученности)
- а если скученность слишком велика?
- Смотрите продолжение через неделю: „Эндогенная полицентрия городов”

- Как фирмы, так и работники стремятся к концентрации в CBD
- поскольку это отвечает их интересам благодаря положительным внешним влияниям
- пока они превышают отрицательные внешние влияния (издержки скученности)
- а если скученность слишком велика?
- Смотрите продолжение через неделю: „Эндогенная полицентрия городов”

- Как фирмы, так и работники стремятся к концентрации в CBD
- поскольку это отвечает их интересам благодаря положительным внешним влияниям
- пока они превышают отрицательные внешние влияния (издержки скученности)
- а если скученность слишком велика?
- Смотрите продолжение через неделю: „Эндогенная полицентрия городов”

- Как фирмы, так и работники стремятся к концентрации в CBD
- поскольку это отвечает их интересам благодаря положительным внешним влияниям
- пока они превышают отрицательные внешние влияния (издержки скученности)
- а если скученность слишком велика?
- Смотрите продолжение через неделю: „Эндогенная полицентрия городов”

- Как фирмы, так и работники стремятся к концентрации в CBD
- поскольку это отвечает их интересам благодаря положительным внешним влияниям
- пока они превышают отрицательные внешние влияния (издержки скученности)
- а если скученность слишком велика?
- Смотрите продолжение через неделю: „Эндогенная полицентрия городов”