Множественность равновесий и катастрофы в общей модели монополистической конкуренции

А.А. Горн, Е.В. Желободько, С.Г. Коковин

НГУ, Bocconi

Обзор

Рассматривается обобщение классической модели монополистической конкуренции в направлении функций полезности более общего вида чем CES-функции. Показаны условия для существования множественных ассиметричных равновесий и вызванных ими катастроф.

Показано, что при такой функции полезности, которая генерирует немонотонную функцию предельной выручки, в некоторой точке множественные ассиметричные равновесия должны появиться. Они появляются и исчезают вместе.

При возрастании населения в стране в такой точке будет наблюдаться большой скачек количества фирм со снижением потребления отдельного разнообразия и скачек уровня полезности.

Актуальность

Модель монополистической конкуренции используется в неск. “новых” теориях: Экономического роста (Агион, Ховитт (1998)), Международной торговли (Хелпман, Кругман (1985)), Экономическ. географии (Фуджита, Кругман, Венаблис (1999), Фуджита, Тисс (2002), Комбс, Майер, Тисс) и др.
А именно, с помощью модели монополистической конкуренции моделируются следующие явления:

- последствия введения торговых отношений между странами
- возможные последствия объединения стран
- миграционные явления

Но применяются в основном модели с использованиям функций типа CES ($u(x) = x^{\alpha}$) или квадратичных функций, что накладывает определенные ограничения. Немного результатов с более общей. Эта работа пополняет их в отношении новых найденных эффектов.
Вопрос единственности и симметричности равновесий ранее только подразумевался, но явно не рассматривался.

MC trade model: assumptions

1. *Возрастающая отдача от масштаба* у фирм, с фиксированными издержками (открытия бизнеса) F и постоянными средними издержками c. Все фирмы идентичны.
2. Каждая фирма i производит одно "разнообразие" или бренд, является цено-образователем, но функция спроса на ее товар $x_i(p_i, P_{-i})$ зависит от других брендов.
3. Каждая функция спроса является результатом максимизации аддитивной функции полезности $U = \int_{i\in[0;N]} u(x_i)di$. Степень вогнутости u - RLV - обратна к степени замещения между разновидностями, к эластичности спроса.
4. *Число фирм достаточно большое*, такое что фирма игнорирует свое влияние на рынок/экономику в целом.
5. *Условие свободного входа в отрасль* толкает прибыль всех фирм к нулю.
6. Рынок труда и товаров сбалансированны.

Модель: Потребитель

Базовая односекторная модель монополистической конкуренции Диксита-Стиглица с континуумом фирм=благ $[0, N]$. Есть L идентичных потребителей. Выбирают потребление: вектор $x(.) : [0, N] \to C_+$ из неотрицательных функций при бюджетном ограничении:

$$\int_0^N u(x(i))di \to \max_{x(.)\in C_+}, \quad \int_0^N p(i)x(i)di \leq R = 1,$$

Вектор цен $p : [0, N] \to \mathbb{R}_+$, где $p(i)$ цена i-го варианта блага, и $x(i)$ спрос на i-ое разнообразие, а $R = 1$ - запас труда потребителя. Решением этой задачи является обратная функция спроса:

$$p^*(x_i, \lambda) = u'(x_i)/\lambda. \tag{1}$$

Где λ - множитель Лагранжа в данной задаче.
где $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ любая неоклассич. функция полезности, удовлетворяющая следующему предположению:

Assumption 1

Assumption 1 (u). *Элементарная функция полезности $u(\cdot) : R_+ \mapsto R_+$ непрерывна и вогнута на всей области определения, строго возрастающая и строго вогнутая на интервале $[0, \check{x}_0)$, где $\check{x}_0 > 0$ обозначает ее аргмаксимум (когда он существует), иначе $\check{x}_0 = \infty$. Более того, $u(\cdot)$ трижды непрерывно дифференцируема на $(0, \check{x}_0]$ и нормализована $u(0) = 0$,ее производная удовлетворяет $u^{'}(0) > 0$, $\lim_{x \to +0} u'(x)x = +0$.*

Мы называем такие функции полезности MC-suitable.

Relative Love for Variety

Ограничения на u гарантируют, что общая полезность $\mathscr{U}$ демонстрирует "любовь к разнообразию", так как (также как в теории рисков) строго вогнутая элементарная функция задает строгую вогнутость общей полезности. Поэтому, при одинаковых ценах на разнообразия, потребитель предпочетает покупать набор разнообразных товаров, а не одну разновидность товара.
Для оценки этого предпочтения мы вводим аналог меры неприятия риска Эрроу-Пратта - меру вогнутости функции полезности:

$$r_u(x_i) \equiv -\frac{x_i u''(x_i)}{u'(x_i)} > 0, \tag{2}$$

- относительную любовь к разнообразию (RLV). RLV обратна к эластичности замены между разнообразиями $\sigma(x)$, т.е. $r_u(z) = 1/\sigma(z)$.

Модель: Производитель

i-й производитель, производит y_i, тратит $cy_i + f$ единиц труда, знает функцию спроса $p^*(x_i, \lambda)$ и множитель Лагранжа λ, максимизирует операционную прибыль по объему производства:

$$\pi(x_i, \lambda, c) \equiv \left(\frac{u'(x_i)}{\lambda} - c \right) x_i \to \max_{x_i \in \mathbb{R}_+} . \tag{3}$$

Здесь $c > 0$ переменные издержки и $f > 0$ фиксированные издержки, измеренные в труде.

$$\pi_u^*(\lambda, c) \equiv \max_{x_i \in \mathbb{R}_+} \pi(x_i, \lambda, c), \qquad X_u^*(\lambda, c) \equiv \arg\max_{x_i \in \mathbb{R}_+} \pi(x_i, \lambda, c). \tag{4}$$

$$f/L \leq \pi_u^*(\lambda, c). \tag{5}$$

Guiding example

Для иллюстрации мы используем следующую функцию полезности:

$$u(x) = x + \sqrt{x} + 1.4\arctan(2x+0.05) - 1.4\arctan(0.05). \qquad (6)$$

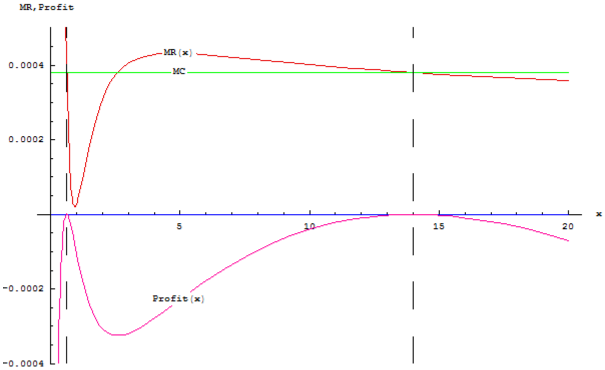

Figure: Non-monotone marginal revenue and non-concave profit function

Асимметрия и множественность: природа возникновения

Два локальных максимума достигают одного и того же уровня прибыли и становятся глобальными максимумами.
Каждый производитель безразличен, какой из оптимальных объемов товара производить: $\hat{x}$ или $\check{x}$, откуда и возникает некоторая неопределенность.
Обозначим за $\hat{N}$ количество производителей, выбравших левый оптимум $\hat{x}$, и за $\check{N}$ количество производителей, выбравших $\check{x}$.
В этих обозначениях баланс на рынке труда может быть записан как:

$$(c\hat{x}L+f)\hat{N}+(c\check{x}L+f)\check{N}=L.$$

Любая пара значений $\hat{N},\check{N}$, удовлетворяющая баланс по труду (и бюджетное ограничение потребителей) является асимметричным равновесием, в котором идентичные фирмы действуют по-разному.

Асимметрия и множественность: необходимые условия

Для гарантии существования более чем одного аргмаксимума для некоторых (λ, c) нужно выполнения следующих граничных условий для нормализованной операционной прибыли $\pi(x,1,c) \equiv (u'(x)-c)x$:

$$\forall c \in (u'(\check{x}_0), u'(0)) \Rightarrow [\exists \check{x}_c \in \arg\max_x \pi(x,1,c),\ 0 \notin \arg\max_x \pi(x,1,c), \tag{7}$$

$$\infty \notin \arg\max_x \pi(x,1,c),\ \pi(\check{x}_c,1,c) > 0]$$

Эти условия слудуют из Assumption 1.

При нарушении строгой вогнутости $\pi(x,1,0) \equiv u'(x)x$, аргмаксимум должен быть не-единственным при определеном уровне издержек $c \in (u'(\check{x}_0), u'(0))$, следовательно условие строгой вогнутости нормализовнной прибыли является необходимым и достаточным условием для единственности и симметрии равновесия при любых издержках.

Assumption 2

Assumption 2. *Функция полезности $u(\cdot)$ генерирует такую функцию нормализованной прибыли $\pi(x,1,c) \equiv (u'(x) - c)x$ что:*
(a) существует конечное число $\kappa \geq 0$ прогибов функции прибыли, т.е. среди всех возможных уровней издержек $c \in [0,\infty)$ найдется только κ значений $c_1 > c_2 > \ldots > c_\kappa$ генерирующих не-единственность аргмаксимума и каждый такой аргмаксимум включает два элемента

$$|X_j^*| = |\arg\max_{x \in \mathbb{R}_+} \pi(x,1,c_j)| = 2 \ \forall j \leq \kappa;$$

(b) число таких прогибов равно одному $(\kappa = 1)$ и более того, нормированная предельная выручка $m_{ru}(x,1) \equiv u'(x) + xu''(x)$ сначала снижается, потом растет, и затем далее снижается на интервале $(0,\check{x}_0)$, где она положительна;
(b') у функции прибыли нет прогибов $(\kappa = 0)$ и функция нормированной предельной выручки $m_{ru}(x,1) \equiv u'(x) + xu''(x)$ снижается на всем интервале $(0,\check{x}_0)$ и функция прибыли строго вогнута.

Пример “обманного” пика

Данный пример построен для функции полезности:
$u(x) = 2x - x^2 + 0.5x^3 - 0.1x^4 + \frac{1}{3600}\sin[4\pi x]$.

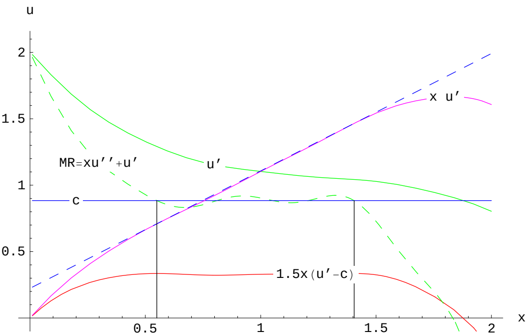

Figure: Marginal revenue and normalized profit for
$u(x) = 2x - x^2 + 0.5x^3 - 0.1x^4 + \frac{1}{3600}\sin[4\pi x]$.

Подход к постановке равновесия

Так как все фирмы идентичны, они решают одинаковую оптимизационную задачу, поэтому когда функция прибыли строго вогнута, в равновесии должны возникать лишь симметричные цены и объемы производства.

$$\kappa = 0 \Rightarrow \;\; p_i \equiv \bar{p}, \;\; x_i \equiv \bar{x} \;\forall i \in [0, n].$$

В случае $\kappa = 1$ задача максимизации прибыли имеет один или два эквивалентных глобальных оптимума $\hat{x} \leq \check{x}$. При этом возможное множество аргмаксимума $X = X^u(\lambda) = \{\hat{x}, \check{x}\}$ остается симметричым, т.е. одинаковым для всех фирм, также как и набор цен:

$$P \equiv \{\hat{p}, \check{p}\} = \{p^*(\hat{x}, \lambda), p^*(\check{x}, \lambda)\}.$$

Подход к постановке равновесия

Множество функционирующих фирм делится на два подмножества: фирмы производящие малый максимизирующий прибыль объем товара $\hat{x}$ и фирмы производящие большой объем товара $\check{x}$. Предположим, что фирмы пронумерованы таким образом, что интервал $[0, \hat{n}]$ относится к "маленьким" фирмам, а интервал $(\hat{n}, \hat{n} + \check{n}]$ к "большим", и общее число фирм/разнообразий равно $n = \hat{n} + \check{n}$. Набор цен в этом случае будет ступенчатой функцией по i:

$$p_i = \hat{p} \equiv p^*(\hat{x}, \lambda)\ \forall i \in [0, \hat{n}], \quad p_i = \check{p} \equiv p^*(\check{x}, \lambda)\ \forall i \in (\hat{n}, n].$$

Определение множественного равновесия

Равновесие с одним или двумя максимумами это набор $(\hat{\lambda}, \hat{x}, \check{x}, \hat{p}, \check{p}, \hat{n}, \check{n}) \in R^7_+$, включающий в себя предельную полезность дохода, потребление, цены, количество больших и малых фирм, такое, что (i) выполняются условия оптимальности для потребителей и производителей; (ii) условие выживания фирм выполняется как равенство, т.е. прибыль снижается из-за свободного входа в отрасль; (iii) выполняется бюджетное ограничение потребителей (которое является эквивалентом баланса труда):

$$(c\hat{x}L + f)\hat{n} + (c\check{x}L + f)\check{n} = L. \tag{8}$$

В случае $\hat{x} = \check{x}$, $\hat{p} = \check{p}$, $\hat{n} = 0$ равновесие называется *симметричным.*

Свойства максимума прибыли

Так как максимальная прибыль является наибольшей площадью прямоугольника под кривой спроса и возрастающий множитель Лагранжа λ двигает эту кривую вниз, то доступное множетсво $\{(p,x)|p \leq p^*(x_i,\lambda)\}$ при этом сокращается. Поэтому, максимальная прирьбыль $\pi_u^*(\lambda,c)$ сокращается с ростом λ (соответственно c).
Для всех λ обозначим соответствующие значения локальных максимумов как:

$$\hat{\pi}^*(\lambda c) \equiv \lambda\pi(\hat{x}(\lambda c),\lambda,c), \quad \check{\pi}^*(\lambda c) \equiv \lambda\pi(\hat{x}(\lambda c),\lambda,c).$$

Свойства максимума прибыли

Возрастание λ или c играет туже роля для этих функций, как и для глобального максимума, и, применяя теорему об огибающей, обсалютное значение производной максимумальной прибыли по издержкам или предельной полезности дохода равна значению спроса в данной точке. Поэтому с случае двух аргмаксимумов $\hat{x} < \check{x}$ должно выполняться:

$$\frac{d\hat{\pi}^*(\lambda c)}{d\lambda} = -\hat{x} > \frac{d\check{\pi}^*(\lambda c)}{d\lambda} = -\check{x}, \tag{9}$$

т.е. функция $\hat{\pi}^*(\lambda c)$ везде снижается медленнее, чем функция $\check{\pi}^*(\lambda c)$, и верхняя огибающая двух локально-оптимальных функций $\hat{\pi}^*(\lambda c), \check{\pi}^*(\lambda c)$ становится глобальным максимумом $\pi_u^*(\lambda, c)$.

Две функции прибыли

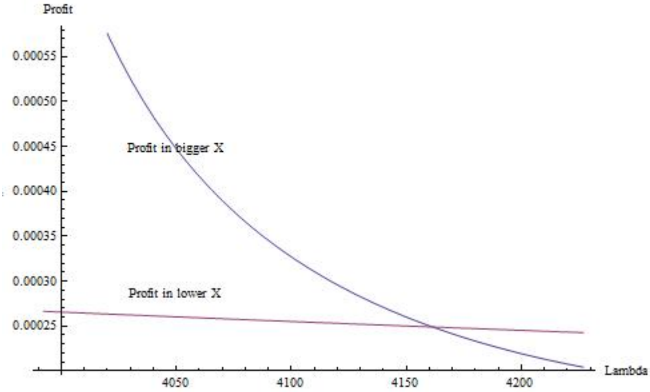

Figure: Two locally-optimal profit functions $\hat{\pi}^*(\lambda c), \breve{\pi}^*(\lambda c)$.

Теорема

Теорема 1 (Существование и единственность или множетсвенность равновесия).
(i) При любых издержках и уровне населения ($c > 0$, $L/f > 0$) и для любой функции полезности, при выполнении Assumption 1 и Assumption 2-a, существует уникальное значение предельной полезности дохода $\hat{\lambda}$ и соответствующие значения потребления и цен $0 < \hat{x} \leq \check{x}$, $\hat{p} \geq \check{p} > 0$, которые задают Равновесие с одним или двумя максимумами вместе с любой парой $(\hat{n}, \check{n}) \geq 0$, которая удовлетворяет баланс по труду, т.е. N - некий интервал.
(ii) При данных c и $\kappa \geq 0$ значимых прогибов в $xu'(x)$, среди всех значений $L/f \in (0, \infty)$ найдется κ критичных значений относительного размера рынка $\hat{L}/f$, задающих асимметрию и множественность равновесия с одним или двумя максимумами: $\hat{x} \neq \check{x}$. В частности, при строго вогнутой $xu'(x)$ такой критической точки $\hat{L}/f$ не существует, т.е. равновесие всегда единственно и симметрично, в то время как без строгой вогнутости всегда должно существовать как минимум одно множественное и асимметричное равновесие.

Способ нахождения равновесия

Возвращаемся к примеру с функцией полезности $u(x) = x + \sqrt{x} + 1.4\arctan(2x + 0.05) - 1.4\arctan(0.05)$ и издержками $f = 0.0025$, $c = 0.0002555$, изменяя население от 0 к ∞. Для анализа сравнительной статики, сначала мы нашли соответствующую функцию предельной выручки $m_{ru}(x_j)$, нашли обратные к ней функции на монотонных интервалах и два уровня производства, соответствующих двум локальным максимумам $\hat{x}(\lambda c), \check{x}(\lambda c)$.
Подставив эти объемы производства в функцию операционной прибыли мы получили две кривые функции прибыли $\hat{\pi}^*(\lambda c), \check{\pi}^*(\lambda c)$ и их верхнюю огибающую $\pi^*(\lambda, c)$. Она монотонно убывающая и непрерывная, поэтому для каждого значения относительного размера рынка L/f мы можем найти единственное значение корня $\hat{\lambda}(L/f)$.

Сравнительная статика потребления и цен

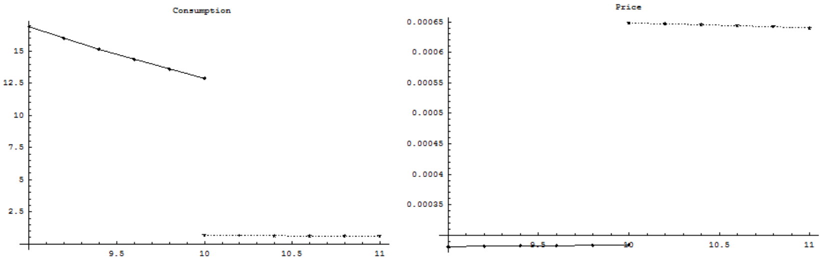

Figure: Dependence of consumption and prices upon market size L.

Характеристики точки переключения

$$\hat{L}/f \approx 10.04$$

(1) $\check{M} = 0.068181933646,\ \hat{x} = 0.652644395317,$
$\check{x} = 12.8961077968,\ \hat{p} = 0.000284323031025,$
$\hat{n}_1 = 272.727734586,\ U_1 = 5081.514933136;$

(2) $\hat{M} = 0.591142507799,\ \hat{x} = 0.652644395317$
$,\check{x} = 12.8961077968,\ \check{p} = 0.0006479943306508,$
$\check{n}_2 = 2364.570031198,\ U_2 = 6549.082752038.$

$$\check{n}(\hat{n}) = 2364.570031198 - 8.670075431758\,\hat{n} \Leftrightarrow$$

$$\hat{n}(\check{n}) = 272.727734586 - 0.115339250260\,\check{n}.$$

Сравнительная статика полезности и числа фирм

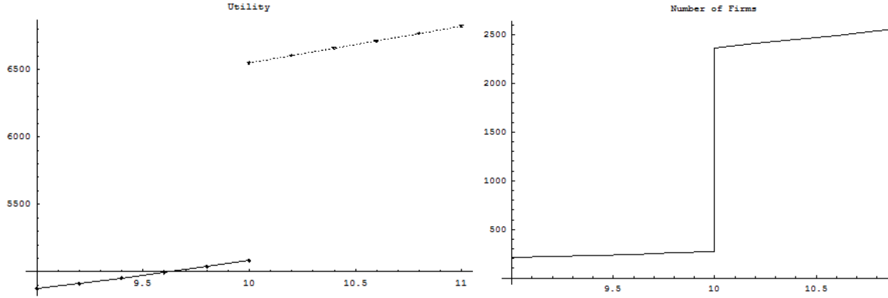

Figure: Utility and mass of firms

Анализ точки переключения

Теорема 2. *При выполнении Assumptions 1, 2-a, возрастающий относительный размер рынка L/f пораждает следующие изменения характеристик равновесия: (i) предельная полезность дохода возрастает; (ii) множество потреблений X^* любого разнообразия падает, множество количества фирм $\hat{n}+\check{n} : \forall(\hat{n},\check{n}) \in N$ возрастает, даже когда X^* прерывается в одной из точек; (iii) множества маркапов и цен падают (соотв. растут) на любом интервале $x(L/f)$ где эластичность $r_u(x)$ возрастает (соотв. падает) и X^* включает в себя один элемент, в точке множественности цены всегда имеют скачок вверх.*

Заключение

Эта работа является больше подсказкой для теоретиков: что происходит если не исключать множественные/асимметричные равновесия.
Интересно, что большинство важных эффектов для потребления и разнообразия остаются действующими.
Новый неожиданные эффекты, такие как катастрофы (резкие изменения), не могут исключаться, а даже гарантированны, когда функция прибыли не строго вогнута на всей области определения.

Thank you